المشتقات

الكفاءات القاعدية

- تعيين العدد المشتق لدالة مرجعية عند قيمة
- معرفة تعيين معادلة لمماس للمنحني الممثل لدالة مرجعية
- تعيين معادلة لمماس للمنحني الممثل للدالة "مربع"
- تعيين العدد المشتق لدالة f عند x_0
- التعرف على قابلية اشتقاق دالة f عند x_0
- تعيين الدوال المشتقة للدوال المرجعية
- معرفة مشتقة مجموع دالتين، مشتقة جداء دالتين، مشتقة مقلوب دالة، مشتقة الدالة "قوة"
- استعمال إشارة المشتقة لتحديد اتجاه تغير دالة على مجال

تصميم الدرس

الأنشطة

1/ العدد المشتق لدالة عند قيمة:

2/ المماس للمنحني الممثل لدالة في نقطة من نقاطه :

3/ الدالة المشتقة لدالة:

4/ المشتقات والعمليات على الدوال:

5/ المشتقات واتجاه التغير:

تمارين ومشكلات حول الوحدة 3

حلول التمارين والمشكلات حول الوحدة 3

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

الأنشطة

النشاط 01 : معامل توجيه مستقيم

- **المعطيات والأسئلة :**

المستوي منسوب إلى معلم $(0,I,J)$

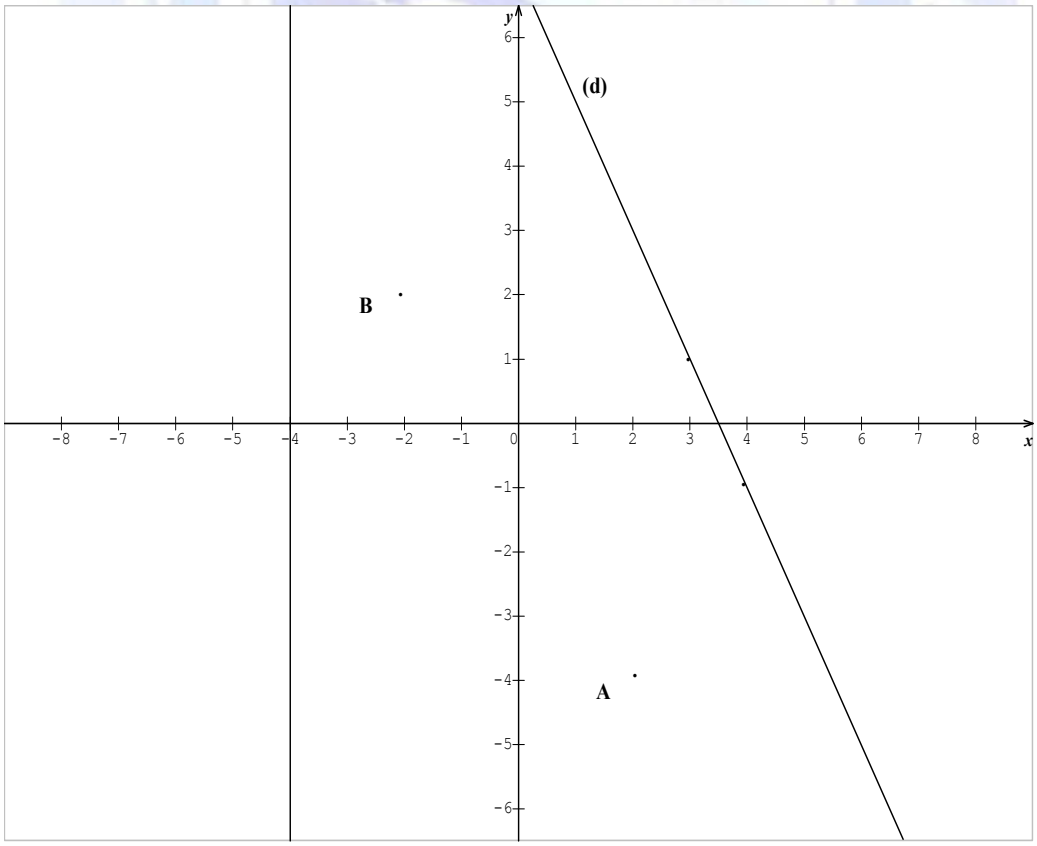
لتكن A و B النقطتين حيث: $A(2,-4)$ و $B(-2,2)$

1- ما هو معامل توجيه المستقيم (AB)؟

2- ما هو معامل توجيه المستقيم (d) الممثل في الشكل؟

3- هل المستقيمان (d) و(AB) متوازيان؟

4- هل للمستقيم (Δ) الممثل في الشكل معامل توجيه؟



http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©

- **الأجوبة، ملاحظة:**

1) معامل توجيه المستقيم (AB) هو $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ وهو $\frac{(2)-(-4)}{(-2)-(2)}$ منه معامل توجيه (AB) هو $\left(-\frac{3}{2}\right)$

2) (d) هو المستقيم (CD) أين $c(3,1)$ و $D(4,-1)$ (حسب الشكل) منه معامل توجيه المستقيم (d) هو $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$ وهو $\frac{(-1)-(1)}{(4)-(3)}$ منه معامل توجيه المستقيم (d) هو (-2)

3) المستقيمان (d) و (AB) ليسا متوازيين لأن معاملي توجيههما مختلفان.

4) المستقيم (Δ) يوازي حامل محور التراتيب وبالتالي (Δ) ليس له معامل توجيه.

¶ ملاحظة:

للإجابة على الأسئلة، استعملت النتائج حول معادلة مستقيم المدروسة في السنة الأولى

النشاط 02 : مفهوم نهاية دالة عند قيمة

- **المعطيات والأسئلة:**

1) لتكن u, g, f الدوال العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على R بما يلي:

$$f(x) = 8x - 6 \text{ ، } g(x) = x(5x^2 + 1) \text{ ، } u(x) = \frac{2x^3 + 5}{x^2 + 3}$$

بالاعتماد على الحدس المحضر، أكمل الجمل التالية:

- من أجل كل قيم x في $R - \{-1\}$، القريبة جدا من (-1) تكون قيم $f(x)$ قريبة جدا من....

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- من أجل كل قيم x في $R-\{\sqrt{3}\}$ القريبة جدا من $\sqrt{3}$ تكون قيم $g(x)$ قريبة جدا من.....
- من أجل كل قيم x في: $R-\{2\}$ القريبة جدا من 2 تكون قيم $u(x)$ قريبة جدا من.....

⟨2⟩ لتكن ϑ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $R-\{3\}$ بما يلي: $\vartheta(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

أ. أكتب عبارة $\vartheta(x)$، من أجل x في $R-\{3\}$، على أبسط شكل ممكن

ب. بالاعتماد على الحدس المحضر، أكمل الجملة

- من أجل كل قيم x في $R-\{3\}$، القريبة جدا من 3 تكون قيم $\vartheta(x)$ قريبة جدا من....

- **الأجوبة والملاحظات، تعبير، ترميز:**

⟨1⟩ * حدسيا عندما يقترب x من (-1)، $8x$ يقترب من $8\times(-1)$ و $(8x-6)$ يقترب من $(8\times(-1)-6)$ وعليه عندما يقترب x من (-1) فإن $f(x)$ يقترب من (-14)

- بصفة مماثلة: عندما يقترب x من $\sqrt{3}$ فإن $g(x)$ يقترب من $16\sqrt{3}$
- بصفة مماثلة: عندما يقترب x من 2 فإن $u(x)$ يقترب من 3

⟨2⟩ أ) من أجل كل قيمة للمتغير x في $R-\{3\}$: $\vartheta(x)=\dfrac{(x-3)(x+3)}{u-3}$

منه: $\vartheta(x)=x+3$

ب) عندما x يقترب من 3 فإن $\vartheta(x)$ يقترب من 6

جميع الحقوق محفوظة ©

¶ ملاحظة:

- الأقوال المنصوص عليها أعلاه تعتمد على الحدس المحضر ويعبر على هذه الأقوال رياضياتيا ويرمز إليها حسب الجدول التلخيصي التالي، حيث اعتبرنا الدالتين f وg، على سبيل المثال

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

القول بالاعتماد على الحدس	التعبير الرياضياتي على القول	الترميز
من أجل كل قيم x في $R-\{-1\}$، القريبة جدا من (-1) تكون قيم $f(x)$ قريبة جدا من (-14)	$f(x)$ يؤول إلى (-14) عندما يؤول x إلى (-1) أو هو نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى (-1) أو (-14) هو نهاية الدالة f عند (-1)	$\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=-14$ أو $\lim\limits_{-1} f=-14$
من أجل كل قيم x في $R-\{3\}$، القريبة جدا من 3 تكون قيم $\vartheta(x)$ قريبة جدا من 6	$\vartheta(x)$ يؤول إلى 6 عندما يؤول x إلى 3 أو 6 هو نهاية $\vartheta(x)$ عندما يؤول x إلى 3 أو 6 هو نهاية الدالة ϑ عند 3	$\lim\limits_{x\to3}\vartheta(x)=6$ أو $\lim\limits_{3}\vartheta=6$

- في الترميز $\lim\limits_{x\to(-1)} f(x)=-14$ ، " lim"، هو اقتصار لكلمة "limite " التي تعني "نهاية" و "$x\to(-1)$" يعني " المتغير x إلى (-1)، دون أن يأخذ القيمة (-1)" وفي الترميز، لا يجب أن "يخرج" $x\to(-1)$ من حدود" lim "
- لو لم نقم بتبسيط عبارة $\vartheta(x)$ لما استطعنا حساب $\lim\limits_{x\to3}\vartheta(x)$! !
- في الدروس الموالية يعتمد على معرفة ما يلي:

تعبير، ترميز:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

جميع المجالات المعتبرة في هذا النص هي مجالات من R كل واحد منها يحتوي مجال مفتوحا غير خال لتكن f دالة عددية للمتغير الحقيقي x مجموعة تعريفها D، مجال أو اتحاد مجالات منفصلة مثنى مثنى وليكن a عددا حقيقا بحيث a ينتمي إلى D أو حد "لأحد هذه المجالات وليكن ℓ عددا حقيقيا كيفيا.

القول "$f(x)$ يؤول إلى ℓ عندما يؤول x إلى a" (أو "ℓ هو نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى a" أو "ℓ هو نهاية الدالة f عند a ") يعني:

" من أجل كل قيم x في $D-\{a\}$، القريبة جدا من a تكون قيم $f(x)$ قريبة جدا من ℓ أو تساوي ℓ" ويرمز إلى هذا القول بالكتابة $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$" أو بالكتابة $\lim\limits_{a} f=\ell$"

النشاط 3: مقاربة لمفهوم المماس

- **المعطيات والأسئلة:**

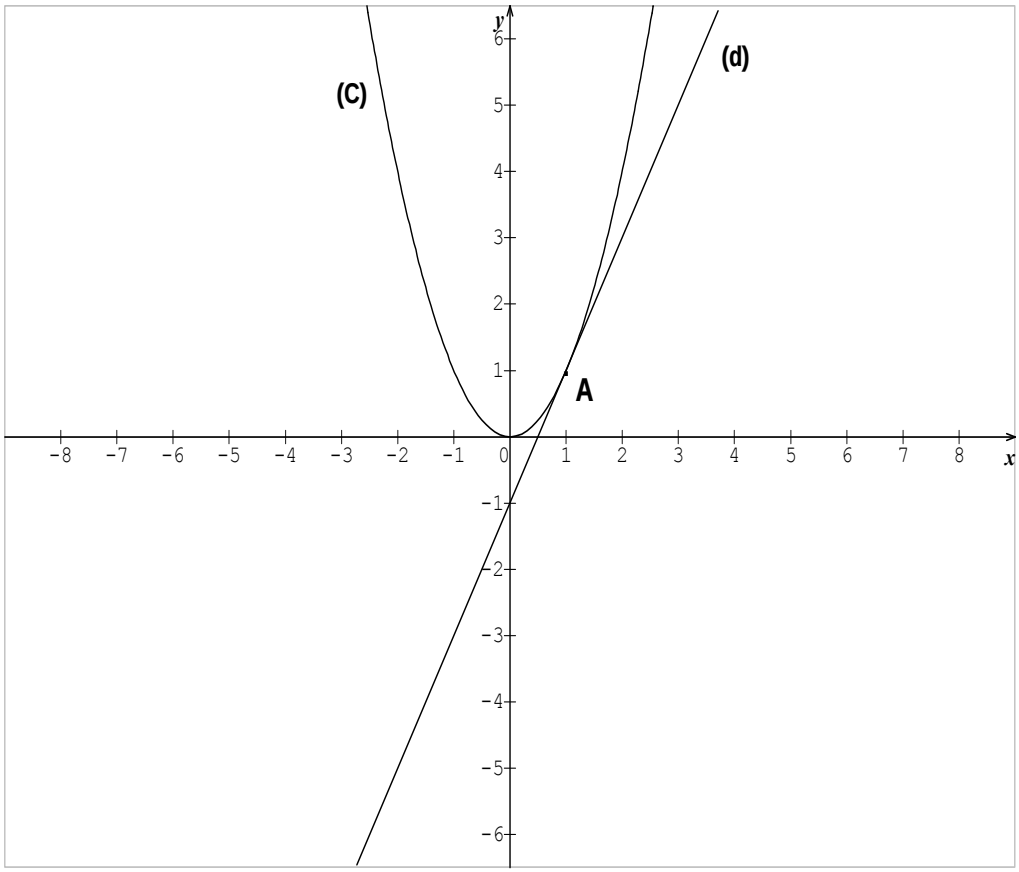
في الشكل المجاور، (C) هو المنحني الممثل للدالة "مربع" بالنسبة إلى المعلم $(0,I,J)$ و A النقطة من (C) التي فاصلتها 1.

1. حدسيا، كيف تسمي المستقيم (d)؟
2. ما هو معامل توجيه المستقيم (d) ؟
3. من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم h نسمي A_h النقطة من (C) التي فاصلتها $(1+h)$ وتسمى (D_h) المستقيم (AA_h) ونسمي $T(h)$ معامل توجيه (D_h)

أ. أرسم (D_2)، (D_1)، $(D_{0,5})$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ب. احسب $T(h)$ بدلالة h ثم أحسب $\lim_{h\to 0} T(h)$



- **الأجوبة والملاحظات:**

1 حدسيا: (d) هو المماس للمنحني (C) في النقطة A

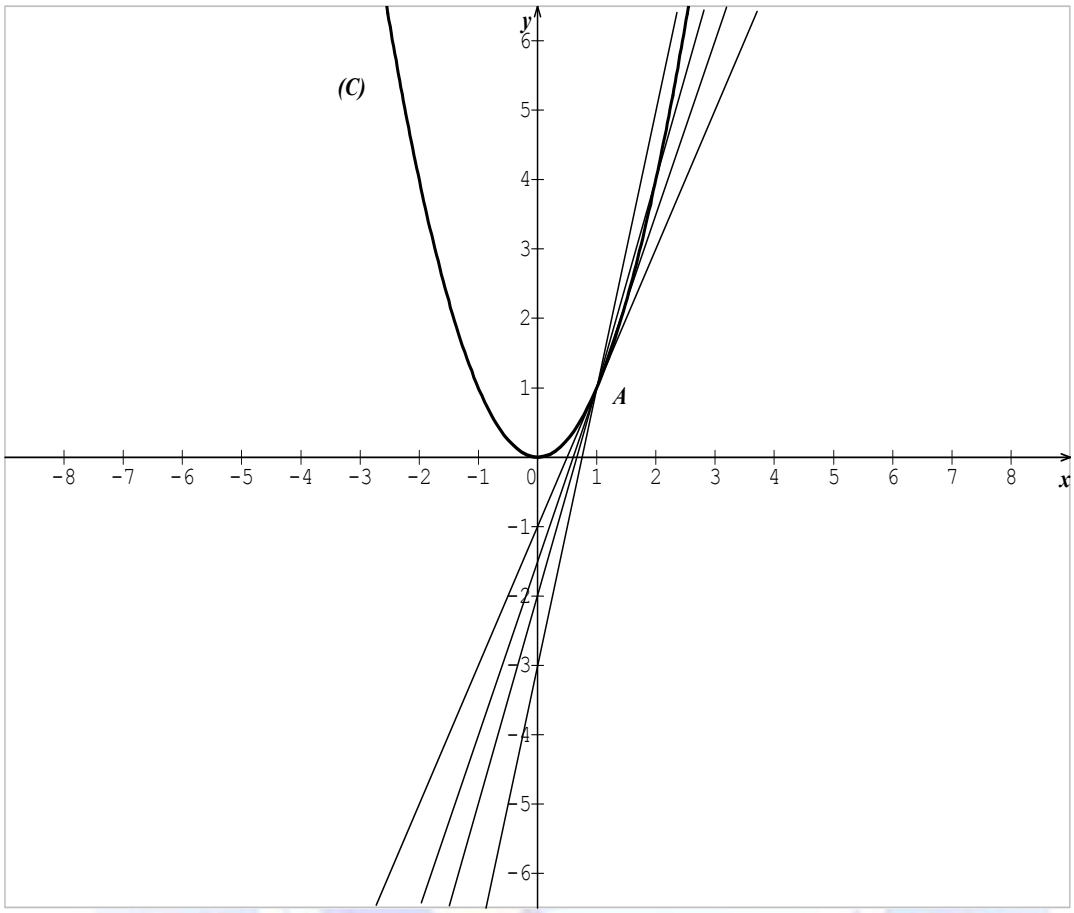
2 حسب الشكل،معامل توجيه (d) هو $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ وهو $\frac{(-1)-(1)}{(0)-1}$ منه

معامل توجيه المستقيم (Δ) هو 2 .....(1)

3 فاصلة A_h هي $(1+h)$ و A_h ينتمي إلى(C) منه ترتيب A_h هو $(h+1)^2$

أ.لرسم الشكل $A_2(3,9)$ ، $A_1(2,4)$ ، $A_{0,5}(1.5,2.25)$ منه الرسم:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©



ب. من أجل كل h في $R-\{0\}$ ، $A_h(1+h,(1+h)^2)$ و $A(1,1)$ منه

$T(h)=\dfrac{(1+h)^2-1}{1+h-1}$ أي $T(h)=\dfrac{h^2+2h}{h}$ منه $T(h)=h+2$ وهذا من أجل

كل h في $R-\{0\}$ و $\lim\limits_{h\to 0}T(h)=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)$

منه $\lim\limits_{h\to 0}T(h)=2$ .....(2)

¶ ملاحظة:

حدسيا: عندما h يقترب من 0 –دون أن يساوي 0- النقطة A_h تقترب من A والمستقيم (D_h) يقترب من (d) منه معامل توجيه المستقيم (D_h) يقترب من معامل توجيه المستقيم (d)

- النتيجتان النظريتان (1) و(2) تعكسان هذه الملاحظة الحدسية !!

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- من خلال هذا النشاط نلاحظ: إذا رمزنا بالحرف g إلى الدالة "مربع"، معامل توجيه المماس للمنحني الممثل للدالة g في نقطته ذات الفاصلة 1 هو $\lim_{h \to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

كل مجال معتبر في هذا الدرس هو مجال من R يحتوي مجالا مفتوحا غير خال، وجميع الدوال المعتبرة هي دوال عددية لمتغير حقيقي.

1/ العدد المشتق لدالة عند قيمة:

أ. تعريف، ترميز:

لتكن f دالة مجموعة تعريفها D مجال أو اتحاد مجالات وليكن x_0 عددا حقيقيا ينتمي إلى المجموعة D.

* القول "الدالة f قابلة للإشتقاق عند x " يعني :

" يوجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=\ell$

* إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق عند x_0، العدد الحقيقي $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ يسمى العدد المشتق للدالة f عند x_0 ويرمز إليه بالرمز $f'(x_0)$

مثال :

لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x)=3x^2+5x-1$

لندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 2، لذلك نهتم بالنهاية

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)$$

لدينا: $f(2)=21$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ومن أجل $h \neq 0$ ، لدينا:

$$f(2+h) = 3(2+h)^2 + 5(2+h) - 1$$
$$= 3(4+4h+h^2) + 5(2+h) - 1$$
$$= 3h^2 + 17h + 21$$

ومنه:

$$f(2+h) - f(2) = 3h^2 + 17h$$
$$= h(3h+17)$$

منه: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 3h+17$

منه: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0}(3h+17)$

$=17$ وعليه:

الدالة f قابلة للاشتقاق عند 2 والعدد المشتق للدالة f عند 2 هو

$f'(2) = 17$

ت. العدد المشتق لدالة مرجعية عند x_0 :

• الدوال التآلفية:

ليكن a و b عددين حقيقيين مفروضين ولتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x) = ax+b$ وليكن x_0 عددا حقيقيا

من أجل $h \neq 0$ ، لدينا: $\begin{aligned} f(x_0+h) &= a(x_0+h)+b \\ &= ax_0 + ah + b \end{aligned}$ و $f(x_0) = ax_0 + b$

منه $f(x_0+h) - f(x_0) = ah$ و $f\dfrac{(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ منه

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right) = a$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

وعليه: الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 والعدد المشتق للدالة f عند x_0 هو $f'(x_0) = a$

مبرهنة:

كل دالة تآلفية f معرفة على R بالدستور من الشكل: $f(x) = ax + b$ أين a و b عددان حقيقيان مفروضان، قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x_0 وعددها المشتق عند x_0 هو $f'(x_0) = a$

- **الدالة "مربع":**

إذا رمزنا بالرمز g إلى الدالة "مربع" فإن الدالة g معرفة على R بالدستور: $g(x) = x^2$ ليكن x_0 عددا حقيقيا

لدينا: $g(x_0) = {x_0}^2$ من أجل $h \neq 0$ ، لدينا $g(x_0 + h) = (x_0 + h)^2$

$= {x_0}^2 + 2hx_0 + h^2$

منه $g(x_0 + h) - g(x_0) = 2hx_0 + h^2$

منه $g\dfrac{(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \dfrac{h(2x_0 + h)}{h}$

منه $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}\right) = \lim\limits_{h \to 0}(2x_0 + h)$

منه $= 2x_0$

وعليه الدالة g قابلة للاشتقاق عند x_0 والعدد المشتق للدالة g عند x_0 هو $g'(x_0) = 2x_0$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة:

الدالة "مربع" قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x_0 والعدد المشتق للدالة "مربع"، عند x_0 هو $2x_0$

- **الدالة "مقلوب":**

إذا رمزنا بالرمز F إلى الدالة "مقلوب" فإن الدالة F معرفة على $R-\{0\}$ بالدستور $F(x)=\frac{1}{x}$ ليكن x_0 عددا حقيقيا غير معدوم

لدينا $F(x_0)=\frac{1}{x_0}$ ومن أجل $h\neq 0$ و $h\neq -x_0$ لنا: $F(x_0+h)=\frac{1}{x_0+h}$

منه $F(x_0+h)-k(x_0)=\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}$

$$=\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h)x_0}$$

$$=\frac{-h}{x_0(x_0+h)}$$

ومنه $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{-1}{x_0(x_0+h)}$

ومنه $\lim_{h\to 0}\left(\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right)=\frac{-1}{{x_0}^2}$

وعليه الدالة F قابلة للاشتقاق عند x_0 والعدد المشتق للدالة k عند x_0 هو

$$F'(x_0)=\frac{-1}{{x_0}^2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة:

الدالة "مقلوب" قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي غير معدوم x_0 وعددها المشتق عند x_0 $(x_0 \neq 0)$ هو $2x_0$ $\frac{-1}{x_0^{\ 2}}$

2/ المماس للمنحني الممثل لدالة في نقطة من نقاطه :

أ. تعريف:

ليكن x_0 عددا حقيقا ولتكن f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0،

وليكن (I) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$

المماس للمنحني (I) في النقطة من نقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 (أي $M_0(x_0;f(x_0)$) هو المستقيم الذي معامل توجيهه يساوي $f'(x_0)$ والذي يشمل النقطة M_0

ب. معادلة المماس:

ومعطيات التعريف السابق سائدة، إذا سمينا (Δ) المماس للمنحني (I) في النقطة M_0 بمأن معامل توجيه (Δ) هو $f'(x_0)$ وعليه للمستقيم (Δ) معادلة من الشكل $y = f'(x_0).x + b$ أين b عدد حقيقي وبما أن M_0 تنتمي إلى (Δ) فإن إحداثيي M_0 تحققان معادلة (Δ)

إذن: $f(x_0) = f'(x_0).x_0 + b$ منه $b = f(x_0) - f'(x_0).x_0$

ومعادلة (Δ) تصبح $y = f'(x_0).x - f'(x_0) + f(.x_0)$

أي $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(.x_0)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مبرهنة:

إذا كان x_0 عددا حقيقيا وكانت f دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 وكان (I) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$،
فإن معادلة للمستقيم (Δ) المماس للمنحني (I) في النقطة من نقطة ذات الفاصلة x_0 هي: $y = f'(x_0).(x - x_0) + f(.x_0)$

مثال:

لنرمز بالرمز F إلى الدالة "مقلوب" ولنسمي (H) المنحني الممثل للدالة "مقلوب" في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$، ولنكتب معادلة للمستقيم (t) المماس للمنحني (H) في النقطة من نقطة ذات الفاصلة 3.

حسب المبرهنة السابقة معادلة للمستقيم (t) هي: $y = F'(3).(x-3) + F(3)$

ولنا: $F'(3) = \frac{-1}{3^2}$ و $F(3) = \frac{1}{3}$ منه معادلة للمستقيم (t):

$$y = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3}$$

ومنه معادلة للمماس (t) في النقطة من نقطة ذات الفاصلة 3 هي:

$$y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

3/ الدالة المشتقة لدالة:

أ- تعريف ، ترميز

لتكن f دالة ولتكن D' مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون عندها الدالة f قابلة للاشتقاق.
إذا كانت المجموعة D' غير خالية ، الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة المرمز إليها بالرمز f' المعرفة على المجموعة D' والتي ترفق بكل عنصر x من D' العدد الحقيقي $f'(x)$ ، العدد المشتق للدالة f عند x.

¶ ملاحظة:

الدالة المشتقة للدالة f تسمى كذلك "مشتقة الدالة f"

ب - الدوال المشتقة لدوال مرجعية:

- إذا كان k عددا حقيقيا مفروضا فإن الدالة f المعرفة على R بالدستور: $f(x)=k$ هي دالة ثابتة وهي دالة تآلفية خاصة لأن $f(x)=0.x+k$ والعدد المشتق للدالة f عند كل عدد حقيقي x_0 هو 0

ومن التعريف السابق ونتائج الفقرة (1) –ب- السابقة نستنتج النتائج الهامة جدا التالية:

مبرهنات:

في الجدول التالي D هي مجموعة تعريف الدالة f و D' هي مجموعة تعريف الدالة f' ، الدالة المشتقة للدالة f.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

D	$f: x \to f(x)$	D'	$f': x \to f'(x)$
R	$f(x) = k$ (k عدد حقيقي مفروض)	R	$f'(x) = 0$
R	$f(x) = ax + b$ (a و b عددان حقيقيان مفروضان)	R	$f'(x) = a$
R	$f(x) = x^2$	R	$f'(x) = 2x$
$R - \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$R - \{0\}$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

4/ المشتقات والعمليات على الدوال:

أ. تعريف العمليات على الدوال، ترميز:

لتكن u دالة مجموعة تعريفها D_u ولتكن ϑ دالة مجموعة تعريفها D_ϑ وليكن k عددا حقيقيا مفروضا

الدالة المرمز إليها بالرمز	تسمى الدالة...	مجموعة تعريفها هي:	وهي معرفة بما يلي:
$u + \vartheta$	مجموع الدالتين u و ϑ	$D_u \cap D_\vartheta$	$(u + \vartheta)(x) = u(x) + \vartheta(x)$
$u.\vartheta$	جداء الدالتين u و ϑ	$D_u \cap D_\vartheta$	$(u.\vartheta)(x) = u(x) + \vartheta(x)$
$k.u$	جداء الدالة	D_u	$(ku)(x) = k.u(x)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

	u بالعدد k		
$\frac{1}{u}$	مقلوب الدالة u	مجموعة قيم x من D_u التي تحقق $u(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$
$\frac{u}{\vartheta}$	حاصل قسمة الدالة u على ϑ	مجموعة قيم x من $D_u \cap D_\vartheta$ التي تحقق $\vartheta(x) \neq 0$	$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)(x) = \frac{u(x)}{\vartheta(x)}$

ب. تعريف:

نقول عن الدالة f أنها قابلة للاشتقاق على مجال I للتعبير على أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي ينتمي إلى المجال I

ج. العمليات على الدوال القابلة للاشتقاق على مجال:

مبرهنات (مقبولة)

لتكن u وϑ دالتين وليكن k عددا حقيقيا مفروضا وليكن I مجالا.

1) إذا كانت الدالتين u وϑ قابلتين للاشتقاق على I

فإن الدالتين $(u+\vartheta)$ و$(u.\vartheta)$ قابلتين للاشتقاق على I ومن أجل كل عنصر x من I

$(u.\vartheta)'(x) = u'(x).\vartheta(x) + u(x).\vartheta'(x)$ أي: $(u.\vartheta)'(x) = u'(x) + \vartheta'(x)$

2) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I

جميع الحقوق محفوظة ©

فإن الدالة (ku) قابلة للاشتقاق على I ومن أجل كل عنصر x من I:

$$(ku)'(x) = k.u'(x)$$

3) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I وكان $u(x) \neq 0$ من أجل كل عنصر x من I: فإن الدالة $\frac{1}{u}$ قابلة للاشتقاق على I من أجل كل عنصر x من I: $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$

4) إذا كانت الدالتين u و ϑ قابلتين للاشتقاق على I وكان $\vartheta(x) \neq 0$ من أجل كل عنصر x من I فإن الدالة $\frac{u}{\vartheta}$ قابلة للاشتقاق على I من أجل كل عنصر x من I:

$$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'(x) = \frac{\vartheta(x).u'(x) - u(x).\vartheta'(x)}{(\vartheta(x))^2}$$

مثلا:

لتكن f الدالة المعرفة بالدستور: $f(x) = x^2 + 3x + 7$

لنضع $u(x) = x^2$ و $\vartheta(x) = 3x + 7$

لما: $f(x) = u(x) + \vartheta(x)$ منه: $f'(x) = u'(x) + \vartheta'(x)$ (حسب المبرهنة السابقة 1)

و $u'(x) = 2x$ (الدالة المشتقة للدالة "مربع")

$\vartheta'(x) = 3$ (الدالة المشتقة للدالة "تآلفية")

منه f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة بالدستور: $f'(x) = 2x + 3$

- لتكن g الدالة المعرفة بالدستور $g(x) = x^3$ ولتكن k الدالة المعرفة بالدستور $k(x) = x^4$

لنضع $u(x) = x^2$ (u هي الدالة مربع) و $\vartheta(x) = x$ (ϑ هي الدالة تآلفية)

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

لدينا: $g(x)=u(x).\vartheta(x)$ منه $g'(x)=u(x).\vartheta'(x)+u'(x).\vartheta(x)$ (حسب المبرهنة السابقة 1)

$$=x^2.1+2x.x$$
$$=3x^2$$

لدينا: $k(x)=u(x).u(x)$ منه: $k'(x)=u(x).u'(x)+u'(x).u(x)$

$$=x^2.2x+2x.x^2$$
$$=4x^3$$

منه الدالة المشتقة للدالة g حيث $g(x)=x^3$ هي الدالة g' المعرفة بالدستور

$$g'(x)=3x^2$$

والدالة المشتقة للدالة k بحيث: $k(x)=x^4$ هي الدالة k' المعرفة بالدستور:

$$k'(x)=4x^3$$

- لتكن F الدالة المعرفة بالدستور: $F(x)=\dfrac{1}{3x^2+1}$

لنضع $u(x)=3x^2+1$ لدينا: $u'(x)=3.2x$ (حسب المبرهنات السابقة (1) و(2) ومشتقة الدالة "مربع" مشتقة دالة ثابتة)

ومنه: $u'(x)=6x$

ولدينا $F(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ منه: $F'(x)=\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$ منه: $F'(x)=\dfrac{-6x}{(3x^2+1)^2}$

- لتكن G الدالة المعرفة على R بالدستور: $G(x)=\dfrac{x^4}{x^2+3x+7}$

لدينا: $G(x)=\dfrac{k(u)}{f(x)}$ حيث k و f الدالتان المعتبرتان أعلاه منه وحسب المبرهنات السابقة 4)

$$G'(x)=\frac{f(x).k'(x)-f'(x).k(x)}{(f(x))^2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

منه: $G'(x)=\dfrac{(x^2+3x+7).(4x^3)-(2x+3).x^4}{(x^2+3x+7)^2}$

بعد إنجاز الحسابات: الدالة G' (الدالة المشتقة للدالة G) معرفة بالدستور

$$G'(x)=\frac{2x^5+9x^4+28x^3}{(x^2+3x+7)^2}$$

ج.مشتقة الدالة "قوة":

من أعمال سابقة، وجدنا

مشتقة الدالة $x\to x^2$ هي الدالة $x\to 2x$

مشتقة الدالة $x\to x^3$ هي الدالة $x\to 3x^2$

مشتقة الدالة $x\to x^4$ هي الدالة $x\to 4x^3$

وبصورة عامة، نقبل أنه إذا كان n عددا طبيعيا، غير معدوم، مفروضا فإن مشتقة الدالة $x\to x^n$ هي الدالة $x\to n.x^{n-1}$

مبرهنة مقبولة:

إذا كان n عددا طبيعيا، غير معدوم، مفروضا،
فإن الدالة f المعرفة بالدستور $f(x)=x^n$ قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة f' معرفة بالدستور $f'(x)=n.x^{n-1}$
- إذا كان a عددا حقيقيا مفروضا وكان n عددا طبيعيا، غير معدوم، مفروضا: فإن الدالة f المعرفة بالدستور $f(x)=ax^n$ قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة f' معرفة بالدستور $f'(x)=na.x^{n-1}$

أمثلة:

إذا كان $f(x)=4x^3$ فإن $f'(x)=12.x^2$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

إذا كان $f(x)=-5x^7$ فإن $f'(x)=-35.x^6$

إذا كان $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^8$ فإن $f'(x)=45.x^7$

5/ المشتقات واتجاه التغير:

مبرهنة مقبولة:

ليكن I مجالا ولتكن f دالة قابلة للاشتقاق على I

* إذا كان $f'(x)=0$ من أجل كل عنصر x من I فإن الدالة f ثابتة على المجال I

* إذا كان: $f'(x)>0$ من أجل عنصر x من I فإن: الدالة f متزايدة تماما على المجال I

* إذا كان: $f'(x)<0$ من أجل عنصر x من I فإن: الدالة f متناقصة تماما على المجال I

* إذا كان: $f'(x)\geq 0$ من أجل عنصر x من I وقيم x التي تحقق $f'(x)=0$ عددها منته فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال I.

* إذا كان: $f'(x)\leq 0$ من أجل عنصر x من I وقيم x التي تحقق $f'(x)=0$ عددها منته فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال I.

أمثلة:

- لتكن f الدالة المعرفة على R بالدستور: $f(x)=3x^2-6x+7$

لدينا f' مشتقة الدالة f معرفة بالدستور: $f'(x)=6x-6$

وإشارة $f'(x)$ تلخص في الجدول

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
إشارة $f'(x)$	- 0 +

منه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1]$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

- لتكن g الدالة المعرفة بالدستور: $g(x)=x^3-7$

g' الدالة المشتقة للدالة g معرفة بالدستور: $g'(x)=3x^2$

من أجل كل عنصر x من R : $g'(x)\geq 0$ و $g'(x)=0$ من أجل قيمة واحدة فقط للمتغير x (وهي 0) منه الدالة g متزايدة تماما على R

¶ ملاحظة:

إشارة $f'(x)$ -حسب قيم x - تمكن من دراسة اتجاه تغير الدالة f

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

تعريف العدد المشتق:

التمرين 1:

أحسب $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ ثم قل ماذا تستنتج من نتيجة هذا الحساب في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=3x^2+x$ و $x_0=\frac{1}{2}$ ، 2) $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$ و $x_0=2$

3) $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ و $x_0=2$

التمرين 2:

لتكن f الدالة المعرفة بالدستور: $f(x)=\frac{0,5x^2+x}{2x^2+5}$

عين العدد المشتق للدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين $x_0=0$ و $x_0=-2$

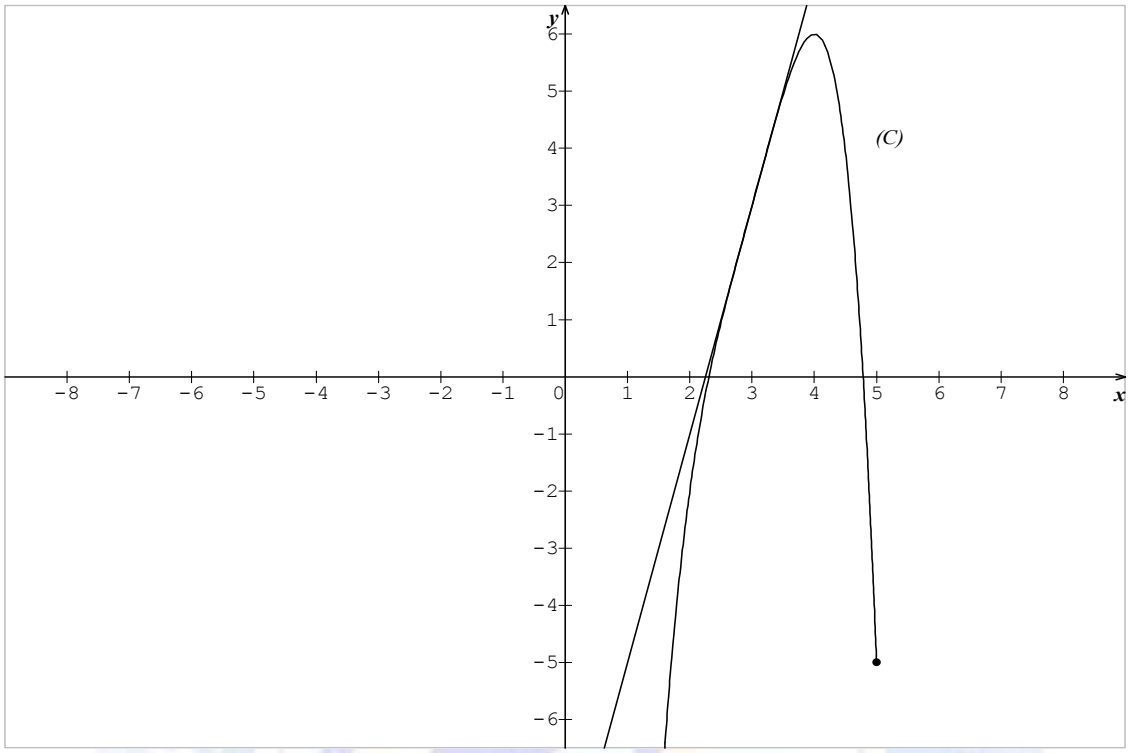
قراءة العدد المشتق لدالة عند قيمة باعتبارات بيانية

التمرين 3:

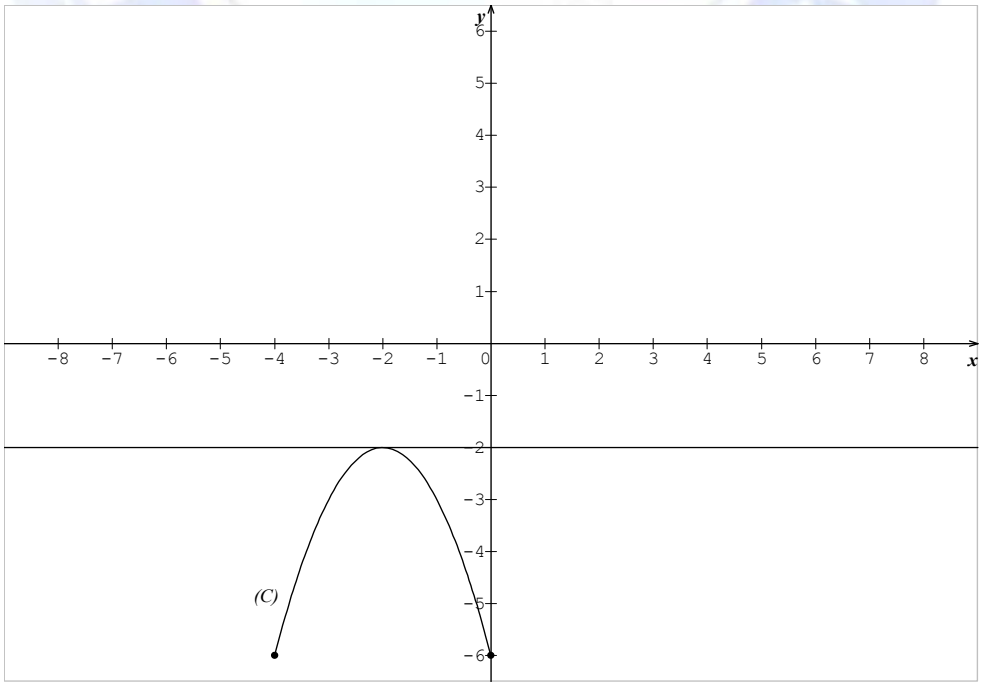
(I) هو المنحني الممثل لدالة f بالنسبة إلى معلم $(0,I,J)$ و (t) المماس للمنحني (I) في النقطة من نقطة من نقطة التي فاصلتها x_0

قل إن كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 وفي حالة الإجابة بنعم، عين $f'(x_0)$ وهذا في كل حالة من الحالات التالية:

جميع الحقوق محفوظة ©

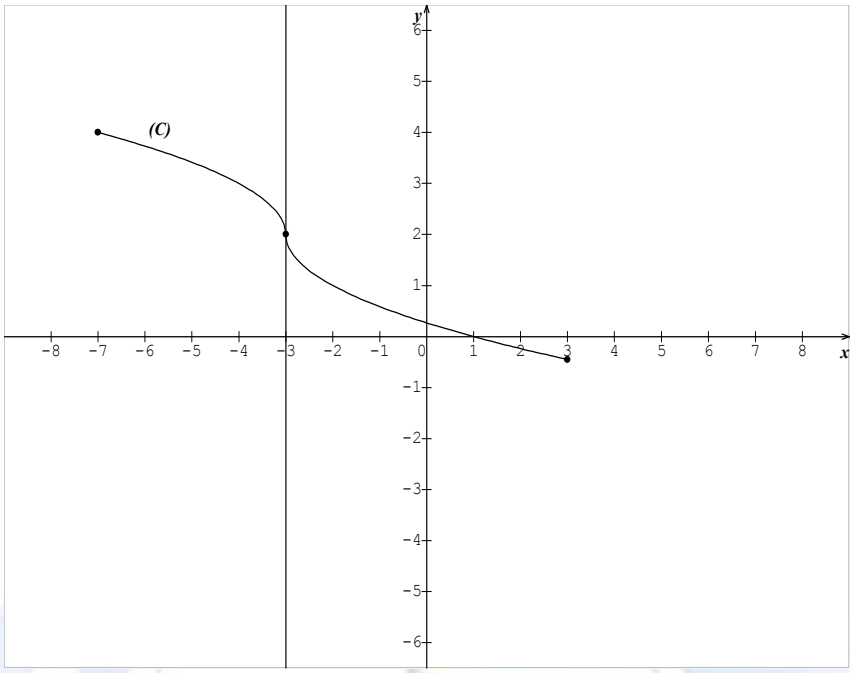


الحالة الأولى: $x_0 = 3$



الحالة الثانية: $x_0 = -2$

http://www.onefd.edu.dz
جميع الحقوق محفوظة ©



الحالة الثالثة: $x_0 = -3$

مشتقات الدوال المرجعية والعمليات على الدوال القابلة للاشتقاق:

التمرين 4:

عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أعط الدستور الذي نعرف به الدالة f' في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 1$ ، 2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 5}$ ،

3) $f(x) = \dfrac{x + 7}{2x + 3}$ ، 4) $f(x) = \dfrac{3x^7 + x - 1}{5x^2 + 4}$ ،

5) $f(x) = \dfrac{-5x^7 + 8}{x^2 - 4}$ ، 6) $f(x) = \dfrac{5}{7x(x^2 - 1)}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

مسائل مماسات:

في هذه التمارين، المستوي منسوب إلى معلم $(0,I,J)$

التمرين 5:

أكتب معادلة للمستقيم (t) المماس للمنحني (I) الممثل للدالة f في النقطة من نقطة التي فاصلتها x_0 في كل حالة من الحالات التالية:

1) f معرفة على R بالدستور: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3$ و $x_0=-5$

2) f معرفة على $R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بالدستور: $f(x)=\frac{3x+5}{4x-2}$ و $x_0=-1$

3) f معرفة على R بالدستور: $f(x)=\frac{-5\sqrt{3}}{x^2+1}$ و $x_0=-\sqrt{3}$

التمرين 6 :

(I) هو المنحني الممثل للدالة f و(t) هو المماس للمنحني (I) في النقطة M_0 من نقطة التي فاصلتها x_0.

عين إحداثيي النقطة M_0 ثم أكتب معادلة للمستقيم (t) في كل حالة من الحالات التالية:

1) f معرفة على R بالدستور $f(x)=3x^2-8x+1$ ومعامل توجيه (t) يساوي (-3)

2) f معرفة على $]1,+\infty[$ بالدستور $f(x)=\frac{3x+5}{1-x}$ ومعامل توجيه (t) يساوي $\frac{8}{9}$

3) f معرفة على R بالدستور $f(x)=x^4+2x+1$ و (t) يوازي حامل محور الفواصل

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

4 f معرفة على $[1,+\infty[$ بالدستور $f(x)=x^3-7x+1$ و(t) يوازي المستقيم (D) ذو المعادلة $y=5x$

5 f معرفة على $]-\infty,0]$ بالدستور $f(x)=x^3+3x+4$ و(t) يشمل مبدأ المعلم

استعمال المشتقات لدراسة اتجاه تغير دالة:

التمرين 7:

في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة تعريف الدالة f ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f باستعمال إشارة $f'(x)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f

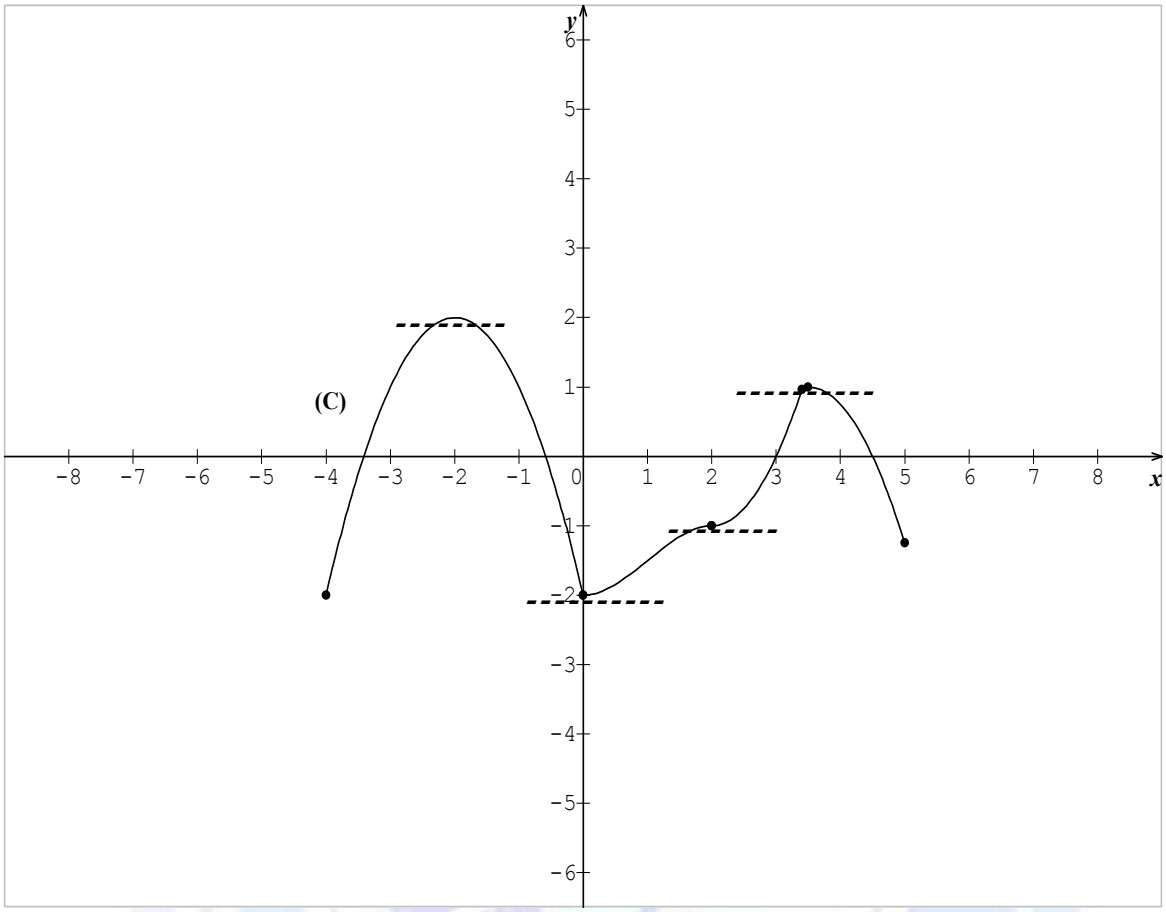
- الحالة الأولى: f معرفة بالدستور: $f(x)=x^2-2x+3$
- الحالة الثانية: f معرفة بالدستور: $f(x)=-5x^2+x-1$
- الحالة الثالثة: f معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-1}$
- الحالة الرابعة: f معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{5x+1}{2x+1}$

التمرين 8 :

في الشكل المجاور، (I) هو المنحني الممثل للدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-5,5]$

أعط إشارة تا'(س) حسب قيم س في المجال $[-5,5]$

جميع الحقوق محفوظة ©



دراسة دالة وتمثيلها بيانيا:

التمرين 9:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-2,2.5]$ بالدستور: $f(x)=x^3-3x-2$ وليكن (I) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

1) أكمل الجدول التالي:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$										

2) أعط الدستور الذي يعرف الدالة f' ، الدالة المشتقة للدالة f

3) أدرس إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

4) أنشئ جدول تغيرات الدالة f

5) أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحني (I) في النقطة من نقطة التي فاصلتها 2

- أرسم المستقيم (D) والمنحني (I)

6) x عدد حقيقي بحيث $0 \leq x \leq 1,5$، بالاعتماد على التمثيل البياني للدالة f ، أعط حصرا للعدد $f(x)$

مسألة استمثال :

أراد بستاني أن يخصص قطعة أرض شكلها مستطيل –وسط بستانه لزرع نوع من البذور ويريد هذا البستاني أن تكون مساحة القطعة $12\ m^2$ وأن يكون محيطها أصغر ما يمكن حتى تكون كلفة الحائط الذي سيجعله حول القطعة أقل ما يمكن.

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

حلول التمارين والمشكلات حول الوحدة 3

تعريف العدد المشتق:

حساب $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$ وذكر الاستنتاج بالنسبة للنتيجة من هذا الحساب

1) $f(x)=3x^2+x$ و $x_0=\frac{1}{2}$

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$

ومن أجل $h\neq 0$ ، لدينا:

$$f(x_0+h)=3\left(\frac{1}{2}+h\right)^2+\left(\frac{1}{2}+h\right)$$

$$=3\left(\frac{1}{4}+h+h^2\right)+\frac{1}{2}+h$$

$$=3h^2+4h+\frac{5}{4}$$

$$f(x_0+h)-f(x_0)=3h^2+4h$$

$$=h(3h+4)$$

وعليه: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=3h+4$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(3h+4)$$

$$=4$$

وعليه f قابلة الاشتقاق عند $\frac{1}{2}$ والعدد المشتق للدالة f عند $\frac{1}{2}$ هو 4.

2) $f(x)=\frac{x+1}{2x-3}$ و $x_0=2$

باتباع نفس المنهجية السابقة نجد:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$f(2)=3$

ومن أجل $h \neq 0$ لدينا:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{-5}{2h+1}$$

ومنه: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-5$

وعليه f قابلة الاشتقاق عند 2 والعدد المشتق للدالة f عند 2 هو (-5)

3 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ و $x_0=2$

بنفس الكيفية السابقة نجد أن: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-1$

ومنه الدالة f قابلة الاشتقاق عند 2 والعدد المشتق للدالة f عند 2 هو (-1)

التمرين 2:

لدينا: $f(x)=\frac{0,5x^2+x}{2x^2+5}$

- ايجاد العدد المشتق للدالة f عند x_0 في كل حالة من الحالتين $x_0=0$ و $x_0=-2$

- باتباع نفس المنهجية الموضحة في التمرين السابق نجد:

العدد المشتق للدالة f عند 0 هو: $f'(0)$ حيث: $f'(0)=\frac{1}{5}$

والعدد المشتق للدالة f عند (-2) هو: $f'(-2)$ حيث: $f'(-2)=-\frac{1}{13}$

قراءة العدد المشتق لدالة عند قيمة باعتبارات بيانية

التمرين 3:

التوضيح إن كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 وتعيين $f'(x_0)$ في حالة الإجابة بنعم

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- الحالة الأولى: $x_0 = 3$

حدسيا: (t) هو المماس للمنحني (I) في النقطة A التي فاصلتها 3.

ومن الرسم يبدو أن ترتيب النقطة A هو 2.

ولتكن B نقطة تقاطع (t) مع حامل محور الفواصل

يبدو أن فاصلة النقطة B هي 4 وترتيبها هو: 0

ومنه حسب الشكل: (t) هو المستقيم (AB)

وعليه معامل توجيه (t) هو: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ أي هو: $\frac{0-2}{4-3}$

ومنه معامل توجيه (t) هو: (-2)

ولنفس الاعتبارات الموضحة في النشاط 3 من الدرس نجد أن:

العدد المشتق للدالة f هند 3 هو: (-2)

- الحالة الثانية: $x_0 = -2$

من الشكل الدالة f قابلة للاشتقاق عند (-2) والمماس (t) يوازي حامل محور الفواصل ومنه:

العدد المشتق للدالة f عند (-2) هو: 0

- الحالة الثالثة: $x_0 = -3$

من الشكل الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند (-3) لأن المماس (t) يوازي حامل محور التراتيب

مشتقات الدوال المرجعية والعمليات على الدوال القابلة للاشتقاق:

التمرين 4:

تعيين مجموعة تعريف الدالة f وإعطاء الدستور الذي نعرف به الدالة f' في كل ما يلي:

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

$\langle 1 \rangle$ $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 1$

مجموعة تعريف الدالة f هي: R

و f' معرفة بالدستور: $f'(x) = -15x^2 + 4x$

$\langle 2 \rangle$ $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 5}$

مجموعة تعريف الدالة f هي: $R - \{5\}$

ومن أجل x من $R - \{5\}$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x(x-5) - 1x(x^2 + 3x)}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 10x - x^2 - 3x}{(x-5)^2}$$

ومنه f' معرفة بالدستور: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 13x}{(x-5)^2}$

$\langle 3 \rangle$ $f(x) = \dfrac{x + 7}{2x + 3}$

مجموعة تعريف f هي: $R - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

والدالة f' معرفة بالدستور: $f'(x) = \dfrac{-11}{(2x+3)^2}$

$\langle 4 \rangle$ $f(x) = \dfrac{3x^7 + x - 1}{5x^2 + 4}$

مجموعة تعريف الدالة f هي: R

ومن أجل x من R لدينا:

$$f'(x) = \frac{(21x^6 + 1)(5x^2 + 4) - 10x(3x^7 + x - 1)}{(5x^2 + 4)^2}$$

$$= \frac{105x^8 + 84x^6 + 5x^2 + 4 - 30x^8 - 10x^2 + 10x}{(5x^2 + 4)^2}$$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

ومنه f' معرفة بالدستور: $f'(x)=\dfrac{75x^8+84x^6-5x^2+10x+4}{\left(5x^2+4\right)^2}$

5) $f(x)=\dfrac{-5x^7+8}{x^2-4}$

مجموعة تعريف الدالة f هي: $R-\{-2,2\}$

والدالة f' معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{-25x^8+140x^6-16x}{(x^2-4)^2}$

6) $f(x)=\dfrac{5}{7x(x^2-1)}$

مجموعة تعريف الدالة f هي: $R-\{0,1,-1\}$

والدالة f' معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{-105x^2+35}{(7x(x^2-1))^2}$

مسائل مماسات:

التمرين 5:

كتابة معادلة للمستقيم (t) المماس للمنحني (I) الممثل للدالة f في النقطة من نقطة التي فاصلتها x_0 :

1) f معرفة على R بالدستور: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x+3$ و $x_0=-5$

الدالة f' معرفة بالدستور: $f'(x)=-x+1$

ومنه: $f'(-5)=6$ ولدينا: $f(-5)=\dfrac{-29}{2}$

وعليه: $y=f'(-5)(x-(-5))+f(-5)$

$$=6(x+5)-\frac{29}{2}$$

$$=6x+30-\frac{29}{2}$$

جميع الحقوق محفوظة ©

$$= 6x + \frac{31}{2}$$

ومنه: $y = 6x + \frac{31}{2}$ معادلة لـ (t)

وبنفس الكيفية مع الاستفادة من "التمرين 4" يكون التعامل مع باقي الحالات.

التمرين 6:

(I) المنحني الممثل للدالة f ، (t) المماس للمنحني (I) في النقطة M_0 من نقطة التي فاصلتها x_0.

- تعيين إحداثيي النقطة M_0 ثم كتابة معادلة للمستقيم (t) في كل حالة

$\langle 1 \rangle$ f معرفة على R بالدستور: $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$ ومعامل توجيه (t) يساوي (-3)

* f' معرفة بالدستور: $f'(x) = 6x - 8$

نسمي (x_0, y_0) إحداثيي النقطة M_0 عندئذ:

$f'(x_0) = -3$ وعليه: $6x_0 - 8 = -3$

أي أن: $x_0 = \frac{5}{6}$

ومنه: $y_0 = f\left(\frac{5}{6}\right) = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 8\left(\frac{5}{6}\right) + 1$

أي أن: $y_0 = -\frac{77}{18}$

وعليه: $y = f'\left(\frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) + f(x_0)$

$$= -3\left(x - \frac{5}{6}\right) - \frac{77}{18}$$

$$= -3x - \frac{11}{6}$$

جميع الحقوق محفوظة ©

ومنه: $y=-3x-\frac{11}{6}$ معادلة للمستقيم (t)

2) f معرفة على $]1,+\infty[$ بالدستور $f(x)=\frac{3x+5}{1-x}$ ومعامل توجيه (t) يساوي $\frac{8}{9}$

* f' معرفة بالدستور: $f'(x)=\frac{8}{(1-x)^2}$

لنسمي (x_0,y_0) إحداثيي النقطة M_0 عندئذ:

$f'(x_0)=\frac{8}{9}$ وعليه: $\frac{8}{(1-x)^2}=\frac{8}{9}$

أي أن $(1-x_0)^2$

وهذا يعني أن: $(1-x_0=3)$ أو $(1-x_0=-3)$

وهذا يعني أن: $(x_0=-2)$ أو $(x_0=4)$

ولكن f معرفة على $]1,+\infty[$ ومنه القيمة (-2) لـ x ليست مقبولة

ومنه: $x_0=4$

وبالتالي: $y_0=f(4)=\frac{3(4)+5}{1-4}=-\frac{17}{3}$

ومنه: $y_0=f'(4)(x-4)+f(4)$

$=\frac{8}{9}(x-4)-\frac{17}{3}$

$=\frac{8}{9}x-\frac{83}{9}$

وبالتالي: $y=\frac{8}{9}x-\frac{83}{9}$ معادلة للمستقيم (t)

- وبنفس الكيفية يكون التعامل مع باقي الحالات

استعمال المشتقات لدراسة اتجاه تغير دالة :

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

- تعيين مجموعة تعريف الدالة f باستعمال إشارة $f'(x)$ ثم إنشاء جدول تغيرات الدالة f

1) f معرفة بالدستور: $f(x)=x^2-2x+3$

مجموعة تعريف الدالة f هي R

والدالة f' معرفة بالدستور: $f'(x)=2x-2$

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	0	+	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1]$

والدالة f متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

وجدول تغيرات الدالة f يمثل في التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2) f معرفة بالدستور: $f(x)=-5x^2+x-1$

التعامل يكون بنفس كيفية الفرع السابق

3) f معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{3x+5}{x-1}$

مجموعة تعريف f هي $R-\{1\}$

والدالة f' معرفة بالدستور: $f'(x)=\dfrac{-8}{(x-1)^2}$

جميع الحقوق محفوظة ©

نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		-	‖	-	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين: $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$

وجدول تغيرات الدالة f يتمثل في التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

4 f معرفة بالدستور: $f(x)=\dfrac{5x+1}{2x+1}$

التعامل يكون بنفس كيفية الفرع السابق

التمرين 8:

- إعطاء إشارة $f'(x)$ حسب قيم x في المجال $[-5,5]$

من الشكل المعطى، نلخص إشارة $f'(x)$ حسب قيم س في المجال $[-5,5]$ في الجدول التالي:

x	-5		-2		0		2		4		5
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	0	-	

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

دراسة دالة وتمثيلها بيانيا:

التمرين 9:

f دالة معرفة على المجال $[-2,2.5]$ بالدستور: $f(x)=x^3-3x-2$ وليكن (I) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(0,I,J)$

1) إكمال الجدول التالي:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	-4	-0,875	0	-0,625	-2	3,375	-4	-3,125	0	6,125

2) إعطاء الدستور الذي يعرف الدالة f' ، الدالة المشتقة للدالة f

الدالة f' معرفة بالدستور: $f'(x)=3x^2-3x$

3) دراسة إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ليكن x عنصرا من المجال $[-2,2.5]$

تلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالي:

x	-2		0		1		2,5
إشارة $f'(x)$		+	0	-	0	+	

ومنه: ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال: $[0,1]$

و الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين: $[-2,0]$ و$[1,2.5]$

4) إنشاء جدول تغيرات الدالة f بالاستفادة من الفرع السابق، نجد أن جدول تغيرات الدالة f يتمثل في التالي:

x	-2		0		1		2,5
$f(x)$	-4	↗	-2	↘	-4	↗	6,125

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

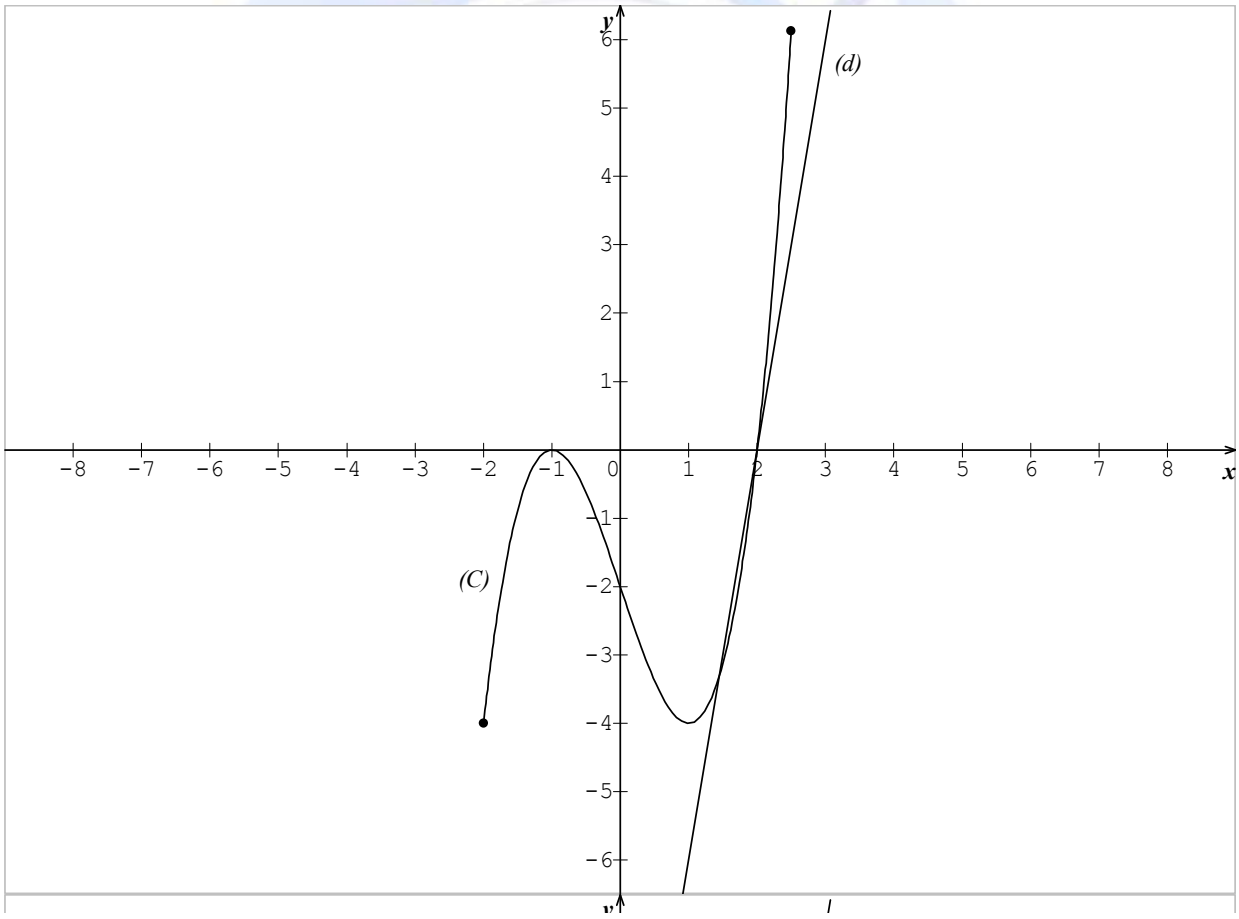
5 كتابة معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحني (I) في النقطة من نقطة التي فاصلتها 2

لدينا:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$= 6(x-2) + 0$$
$$= 6x - 12$$

ومنه: $y = 6x - 12$ معادلة للمماس (Δ)

- رسم المستقيم (Δ) والمنحني (I)



http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

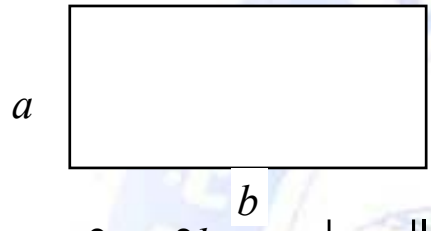
إعطاء حصر للعدد $f(x)$ ، بالإعتماد على التمثيل البياني للدالة f ، حيث x عدد حقيقي أين: $0 \le x \le 1,5$

بالإعتماد على التمثيل البياني (I) نجد أنه لما: $0 \le x \le 1,5$ فإن

$-4 \le f(x) \le -2$

مسألة استمثال:

مساعدة البستاني لإيجاد بعدي النقطة



ليكن a عرض القطعة المستطيلة

وليكن b طول القطعة المستطيلة

ولدينا المساحة هي: 12m^2 لهذه القطعة عندئذ: المحيط هو: $2a+2b$ حيث:

a ، b عنصران من R_+^*

$$a \times b = 12$$

نعتبر الدالة f للمتغير a المعرفة بالدستور:

$$f(a) = 2a + 2b$$

عندئذ: $f(a) = 2a + 2 \times \frac{12}{a} = 2a + \frac{24}{a}$

والدالة f' معرفة بالدستور:

$$f'(a) = 2 - \frac{24}{a^2} = \frac{2(a^2 - 12)}{a^2}$$

نلخص إشارة $f'(a)$ في الجدول التالي:

a	0	$\sqrt{12}$	$+\infty$
إشارة $f'(a)$	-	0	+

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0, \sqrt{12}]$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©

والدالة الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\sqrt{12},+\infty\right[$

ومنه أصغر قيمة لـ $f(a)$ تظهر من أجل $\sqrt{12}$ كقيمة لـ a

وعليه: $f(\sqrt{12})=2\sqrt{12}+2\times\frac{12}{\sqrt{12}}=4\sqrt{12}$

وبما أن: $a\times b=12$ فإن: $b=\sqrt{12}$

ومنه بعدي النقطة هما: a و b هي: $a=b=\sqrt{12}$

والمحيط حينئذ: هو $f(\sqrt{12})$ حيث: $f(\sqrt{12})=4\sqrt{12}$

http://www.onefd.edu.dz جميع الحقوق محفوظة ©